Logique : syntaxe, sémantique et déduction naturelle

OPTION INFORMATIQUE - TP nº 4.6 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

☞ réviser les concepts vus en première année

☞ appliquer la déduction naturelle sur des preuves simples

A Exercices

A1. Simplifier les expressions logiques suivantes. Vous pouvez notamment utiliser l'associativité de $\wedge$ et $\vee$, la distributivité entre $\wedge$ et $\vee$, les loi de De Morgan. Statuer sur le fait que l'expression est une tautologie, une antilogie ou simplement satisfaisable.

(a) $P_1 = a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$

Solution :

$$\begin{aligned} P_1 &= a \Rightarrow (a \vee \neg b) && (1)\\ &= (a \vee \neg b) \vee \neg a && (2)\\ &= a \vee \neg a \vee b = \top \vee b = \top && (3)\\ & && (4) \end{aligned}$$

(b) $P_2 = \neg((p \vee q) \Rightarrow p) \wedge q$

Solution :

$$\begin{aligned} P_2 &= \neg(p \vee \neg(p \vee q))) \wedge q && (5)\\ &= \neg p \wedge (p \vee q) \wedge q && (6)\\ &= \neg p \wedge q && (7)\\ & && (8) \end{aligned}$$

P_2 est satisfaisable. Par exemple, pour la valuation $p = F$ et $q = V$. On peut le vérifier en établissant la table de vérité.

(c) $P_3 = (b \vee a) \vee \neg(a \vee b)$

Solution :

$$\begin{aligned} P_3 =& (b \vee a) \vee \neg(a \vee b) && (9)\\ =& b \vee a \vee \neg a \wedge \neg b && (10)\\ =& \top && (11)\\ & && (12) \end{aligned}$$

P_3 est une tautologie. On peut le conclure en utilisant le tiers exclu.

(d) $P_4 = (a \vee (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \vee b \vee c)$

Solution :

$$\begin{aligned} P_4 =& (a \vee (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \vee b \vee c) && (13)\\ =& (a \vee \neg b \vee c) \Rightarrow (a \vee b \vee c) && (14)\\ =& (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \vee b \vee c) && (15)\\ =& \top && (16)\\ & && (17) \end{aligned}$$

P_4 est une tautologie.

(e) $P_5 = (b \oplus a) \oplus \neg(a \oplus b)$ où $\oplus$ est le OU Exclusif

Solution : On peut appliquer la définition du ou exclusif en observer que les deux expressions entre parenthèses sont la négation l'une de l'autre. P_5 est donc une tautologie.

(f) $P_6 = a \downarrow (b \downarrow a)$ où $\downarrow$ est le symbole de la négation de la disjonction.

Solution :

$$\begin{aligned} P_6 =& \neg(a \vee \neg(b \vee a)) && (18)\\ =& \neg a \wedge (b \vee a) && (19)\\ =& \neg a \wedge b && (20)\\ & && (21) \end{aligned}$$

P_6 est staisfaisable pour la valuation $a = F$ et $b = V$.

A2. Montrer que le système $\Sigma = \{\uparrow\}$ est un système de connecteurs complet, où $\uparrow$ est le symbole de la négation de la conjonction.

Solution : Il suffit d'exprimer tous les connecteur standard nécessaire à la définition des formules logiques ($\wedge, \vee, \neg$) en fonction de $\uparrow$.

$$\neg a = a \uparrow a \tag{22}$$
$$a \vee b = (a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b) \tag{23}$$
$$a \wedge b = (a \uparrow b) \uparrow (a \uparrow b) \tag{24}$$
$$\tag{25}$$

Ce système est donc complet, on peut exprimer toute la logique des propositions avec.

A3. Montrer qu'une formule logique peut toujours se mettre sous une forme normale disjonctive. En déduire, l'existence d'une forme normale conjonctive pour toute formule logique.

Solution : cf cours : la FND ϕ est juste la disjonction de tous les modèles de valuation, c'est-à-dire les valuations pour lesquelles la formule est vraie.
Par la loi de De Morgan appliquée à $\neg\phi$, on en déduit l'existence d'une FNC.

A4. Mettre sous forme normale conjonctive (FNC) et sous forme normale disjonctive (FND) les propositions logiques :

(a) $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

Solution : FNC : $\neg p \vee \neg q \vee r$ est obtenue en prenant les contres-modèles de la table de vérité. C'est une FNC à une seule clause.

FND :

$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

est obtenue en prenant les modèles de la table de vérité.

(b) $((\neg p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \oplus r)$ où $\oplus$ est le ou exclusif.

Solution : FNC : $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
FND :

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

A5. Soient n variables propositionnelles $v_1, v_2, \ldots, v_n$. On considère les propositions logiques :

$$P = ((v_1 \Longrightarrow v_2) \wedge (v_2 \Longrightarrow v_3) \wedge \ldots \wedge (v_{n-1} \Longrightarrow v_n)) \quad \text{et} \quad Q = (P \wedge (v_n \Longrightarrow v_1))$$

(a) Quelles sont les modèles de P ?

Solution : On utilise la réécriture de l'implication sous la forme d'une disjonction :

$$v_i \Rightarrow v_{i+1} \equiv \neg v_i \vee v_{i+1}$$

On cherche les modèles de P, c'est-à-dire les valuations pour lesquelles P est vraie. Or, il est nécessaire que toutes les clauses disjontives soient vraies pour que P soit vraie.

$$P = (\neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee v_3) \wedge \ldots \wedge (\neg v_{n-2} \vee v_{n-1}) \wedge (\neg v_{n-1} \vee v_n)$$

1. On remarque que si toutes les variables sont fausses, la proposition est vraie.
2. De la même manière, si toutes les variables sont vraies, la proposition est vraie.
3. Entre les deux, un modèle possible est que les variables v_i soient fausses jusqu'à un certain k puis vraies après k.

Les deux premiers points sont des cas particuliers du troisième.
Si on note la valuation une $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ alors les modèles de P s'écrivent :

- soit $(0,0,\ldots,0,0,0,\ldots,0)$,
- soit $(0,0,\ldots,0,1,1,\ldots,1)$,
- soit $(1,1,\ldots,1,1,1,\ldots,1)$.

(b) En déduire une forme normale disjonctive pour P.

Solution : Ce qui s'écrit :

$$P = \bigvee_{k\in[\![1,n]\!]} \bigwedge_{i\in[\![1,k]\!]} \neg v_i \bigwedge_{j\in[\![k+1,n]\!]} v_j$$

(c) Mêmes questions pour Q.

Solution : Les modèles de Q sont les modèles de P et les modèles de l'implication matérielle entre v_n et v_1.

$$Q = P \wedge (\neg v_n \vee v_1)$$

Cette nouvelle implication n'est pas compatible avec une valuation intermédiaire de P, c'est-à-dire celle pour laquelle il existe un k différent de 0 et de n avant lequel les v_i sont fausses et après lequel les v_i sont vraies. En effet, on aurait dans ce cas v_1 fausse et v_n vraie. Or, Du vrai on ne peut pas déduire le faux. Donc ces valuations ne satisfont pas Q.

Il reste donc les valuations toutes fausses ou toutes vraies. Pour ces deux valuations, l'implication $v_n \Rightarrow v_1$ est vraie.
On peut donc écrire Q comme une FND :

$$Q = \bigwedge_{i\in[\![1,n]\!]} v_i \vee \bigwedge_{i\in[\![1,n]\!]} \neg v_i$$

A6. Montrez de deux façons différentes que la formule $\phi : (p \Longrightarrow (q \vee r)) \wedge (p \Longrightarrow (q \vee \neg r)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$ est une tautologie.

Solution :

1. Par table de vérité,
2. Par simplification logique,
3. Par déduction naturelle.

Par table de vérité. Go !

Par simplification logique : $\phi = (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q$. On observe que si $\neg p$ et q sont faux, alors le terme entre parenthèse est vrai. Il y a donc toujours un terme de la disjonction qui est vrai. ϕ est une tautologie.

Par déduction naturelle : on note Γ l'hypothèse $(p \to (q \vee r)) \wedge (p \to (q \vee \neg r))$. On chercher à prouver le séquent $\Gamma \vdash p \to q$.

On montre dans un premier temps que $\Gamma, p, r \vdash q$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash p \to (q \vee \neg r)$}
\RightLabel{Aff}
\UnaryInfC{$\Gamma, r \vdash p \to (q \vee \neg r)$}
\RightLabel{$\to_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, p, r \vdash q \vee \neg r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, p, r, q \vdash q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, p, r, \neg r \vdash r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, p, r, \neg r \vdash \neg r$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, p, r, \neg r \vdash \bot$}
\RightLabel{$\bot_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, p, r, \neg r \vdash q$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma, p, r \vdash q$}
\end{prooftree}
$$

On peut alors finir la preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash p \to (q \vee r)$}
\RightLabel{$\to_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, p \vdash q \vee r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, p, q \vdash q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{cf. ci-dessus}
\UnaryInfC{$\Gamma, p, r \vdash q$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma, p \vdash q$}
\RightLabel{$\to_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash p \to q$}
\end{prooftree}
$$

B Extrait de CCMP 2005

Résumé des concepts de l'énoncé :

- On appelle littéral une variable booléenne ou sa négation, a ou $\neg a$.
- On appelle clause une disjonction de littéraux.
- On appelle longueur d'une clause le nombre des littéraux qui composent cette clause.
- On appelle formule logique sous forme normale conjonctive une conjonction de clauses.

Dans ce problème, on s'intéresse aux formules logiques sous forme normale conjonctive pour lesquelles toutes les clauses sont de longueur 2. On dit qu'une telle formule est sous forme NC2.

Lorsqu'on consière une formule logique, on suppose que les littéraux d'une même clause sont différents et que toutes les clauses sont différentes.

Une formule logique est dite satisfaisable s'il existe une façon d'attribuer des valeurs aux variables booléennes telle que la formule soit évaluée à vrai, c'est-à-dire il existe un modèlde de la formule.

B1. Étant données trois variables booléennes x, y et z, on considère la formule :

$$F_1 = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg z)$$

F_1 est-elle satisfaisable ? Justifier votre réponse.

Solution : On peut simplifier la deuxième et la quatrième clause.

$$F_1 = (x \vee y) \wedge \neg x \wedge (z \vee \neg z) \wedge (\neg y \vee z) = (x \vee y) \wedge \neg x \wedge (\neg y \vee z)$$

B2. Étant données quatre variables booléennes x, y, z, t, on considère la formule :

$$F_2 = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge (t \vee \neg z) \wedge (y \vee \neg t) \wedge (x \vee \neg y)$$

F_2 est-elle satisfiable ? Justifier votre réponse.

Solution : On peut simplifier la première et la dernière clause.

$$F_2 = x \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge (t \vee \neg z) \wedge (y \vee \neg t)$$

Quatre personnes, nommées X,Y,Z et T peuvent être chacune soit fiable, soit non fiable : une personne fiable dit toujours la vérité ; une personne non fiable peut dire la vérité ou mentir. Chacune de ces personnes sait si les autres sont fiables ou non.

- X dit : Z est fiable.
- Y dit : Z est non fiable, T est fiable.
- Z dit : Y est fiable, T est fiable.
- T dit : X est non fiable, Y est fiable.

Par ailleurs, on sait que :

- X est fiable ou Y est fiable ou X et Y sont fiables.
- Z est fiable ou T est fiable ou Z et T sont fiables.

On définit quatre variables booléennes ; la variable booléenne x (resp. y, z, t) vaut vrai si X (resp. Y, Z, T) est fiable et faux si X (resp. Y, Z, T) n'est pas fiable.

B3. Exprimer, à l'aide des variables x, y, z, t et de leurs négations, sous forme NC 2 , les renseignements dont on dispose sur la fiabilité ou la non-fiabilité des quatre personnes X,Y,Z, et T.

Solution : On traduit chaque affirmation en termes de fiabilité :

- $x \Rightarrow z$ (Si X est fiable, alors Z est fiable)

$$\neg x \vee z \tag{26}$$

- $y \Rightarrow \neg z$ et $y \Rightarrow t$ (Si Y est fiable, alors Z est non fiable et T est fiable)

$$\neg y \vee \neg z \tag{27}$$

$$\neg y \vee t \tag{28}$$

- $z \Rightarrow y$ et $z \Rightarrow t$ (Si Z est fiable, alors Y et T sont fiables)

$$\neg z \vee y \tag{29}$$

$$\neg z \vee t \tag{30}$$

- $t \Rightarrow \neg x$ et $t \Rightarrow y$ (Si T est fiable, alors X est non fiable et Y est fiable)

$$\neg t \vee \neg x \tag{31}$$

$$\neg t \vee y \tag{32}$$

B4. Déterminer les personnes fiables et les personnes non fiables. Prouver le résultat.

Solution : On traduit les contraintes complémentaires :

$$x \vee y \tag{33}$$

$$z \vee t \tag{34}$$

On essaie d'assigner des valeurs aux variables x, y, z, t en respectant toutes les contraintes.
Les contraintes $x \vee y$ et $z \vee t$ impliquent que *au moins une des deux variables de chaque paire est vraie.*

- Supposons que x est vraie (X est fiable) :
  - Alors z est vraie (car $x \Rightarrow z$), ce qui signifie que Z est fiable.
  - Alors Y et T sont fiables.
  - Mais Y dit que Z est non fiable, donc Y n'est pas fiable,. Ce qui est absurde.
  - De même pour T.

  On en conclut que x est faux, X n'est pas fiable.
- On déduit que y est vrai, Y est fiable car $x \vee y$.
- On en déduit que z est faux et t est vrai.
- Toutes les contraintes sont respectées.

Ainsi, les personnes fiables sont **Y et T**, et les personnes non fiables sont **X et Z**.
On peut démontrer tout ceci formellement ;-)