# Des expressions régulières aux automates

OPTION INFORMATIQUE - TP nº 4.1 - Olivier Reynet

**À la fin de ce chapitre, je sais :**

- ☞ coder la linéarisation d'une expressions régulière
- ☞ déterminer les composantes P,S et F relatives à une expression régulière linéaire
- ☞ coder l'algorithme de Berry-Sethi et trouver l'automate de Glushkov associé à une expression régulière

## A Linéarisation d'une expression régulière

On souhaite réaliser la linéarisation d'une expression régulière dans le but d'implémenter l'algorithme de Berry-Sethi. On dispose du type `regexp` algébrique suivant :

```
type regexp =    EmptySet
               | Epsilon
               | Letter of char
               | Sum of  regexp * regexp
               | Concat of regexp * regexp
               | Kleene of regexp ;;
```

---

On se donne le type algébrique `lregexp` qui représente une expression régulière linéarisée :

```
type lregexp =
    Letter_ind of char * int
    | SumL of  lregexp * lregexp
    | ConcatL of lregexp * lregexp
    | KleeneL of lregexp ;;
```

---

Un littéral est donc codé par une lettre associée à un numéro qui code l'ordre d'apparition de la lettre dans l'expression régulière. Le mot vide et l'ensemble vide n'ont pas leur place dans les expressions linéarisées car l'automate local est déterministe et ne transite que sur des lettres de l'alphabet.

A1. Écrire une fonction récursive de signature
`linearize_and_count : regexp -> int -> lregexp * int`
qui linéarise une expression régulière. Le paramètre de type `int` est le compteur de variable : on l'incrémente à chaque fois qu'on découvre un littéral ou une occurrence d'un littéral. La fonction renvoie l'expression linéarisée ainsi que l'état du compteur de variable. Si l'expression contient l'ensemble vide ou le mot vide, une exception est levée. La fonction s'utilise ainsi :
`linearize_and_count e 1`
en initialisant le compteur à 1. Pour l'expression régulière $(a|b)^*c$, la fonction renvoie :

```
(ConcatL (KleeneL (SumL (Letter_ind ('a', 1), Letter_ind ('b', 2))),Letter_ind
    ('c', 3)),4)
```

---

**Solution :**

```
let rec linearize_and_count e counter =
    match e with
      | EmptySet -> failwith "Regular expression must not contain EmptySet"
      | Epsilon -> failwith "Regular expression must not contain Epsilon"
      | Letter(a) -> Letter_ind(a, counter), counter + 1
      | Sum(e1,e2) -> let (e3,c) = linearize_and_count e1 counter in let (e4
        ,c2) = linearize_and_count e2 c in SumL(e3,e4), c2
      | Concat(e1,e2) -> let (e3,c) = linearize_and_count e1 counter in let
        (e4,c2) = linearize_and_count e2 c in ConcatL(e3,e4), c2
      | Kleene(e) -> let (e1,c) = linearize_and_count e counter in KleeneL(
        e1),c
;;
```

A2. Écrire une fonction «wrapper» de signature `linearize : regexp -> lregexp` qui permette de ne récupérer que l'expression régulière linéarisée, sans le compteur.

**Solution :**

```
let linearize e = let (linexp, _) = linearize_and_count e 1 in linexp;;
```

## B Calcul des composantes P, S et F associées à un expression régulière

Toujours dans l'optique d'implémenter l'algorithme de Glushkov, on cherche maintenant à caractériser les ensembles P (préfixes à une lettre), S (suffixes à une lettre) et F (facteurs possibles de deux lettres) d'une expression régulière linéarisée.

B1. Pour les expressions régulières suivantes, trouver les ensembles P, S et F tels que définis dans le cours : $(a|b)^* c$ et $((a|b)^* c)|b$.

**Solution :** Pour $(a|b)^* c = (a_1|b_2)^* c_3$ :

- $P = \{(a_1, b_2, c_3\}$,
- $S = \{c_3\}$,
- $F = \{a_1 a_1, a_1 b_2, b_2 a_1, b_2 b_2, a_1 c_3, b_2 c_3\}$.

Pour $((a|b)^* c)|b = ((a_1|b_2)^* c_3)|b_4$ :

- $P = \{a_1, b_2, c_3, b_4\}$,
- $S = \{c_3, b_4\}$,
- $F = \{a_1 a_1, a_1 b_2, b_2 a_1, b_2 b_2, a_1 c_3, b_2 c_3\}$.

B2. **Ensemble P.** Écrire une fonction récursive de signature
`first_letter_prefix : lregexp -> (char * int)list`
qui renvoie la liste des préfixes à une lettre d'une expression régulière linéarisée. Par exemple pour `(a|b)*c` linéarisée, la fonction renvoie `(char * int)list = [('a', 1); ('b', 2); ('c', 3)]`.

**Solution :**

```
let rec first_letter_prefix e = (* ne peut pas être Epsilon, mais attention
    au Kleene ! *)
    match e with
      | Letter_ind (a,i) -> [a,i]
      | SumL(e1, e2) -> first_letter_prefix e1 @ first_letter_prefix e2
      | ConcatL(KleeneL(e1), e2) -> first_letter_prefix e1 @
        first_letter_prefix e2
      | ConcatL(e1, _) -> first_letter_prefix e1
      | KleeneL(e) -> first_letter_prefix e
    ;;
```

B3. **Ensemble S.** Écrire une fonction récursive de signature
`last_letter_suffix : lregexp -> (char * int)list`
qui renvoie la liste des suffixes à une lettre d'une expression régulière linéarisée. Par exemple pour $(a|b)^*c$ linéarisée, la fonction renvoie `(char * int)list = [('c', 3)]`.

**Solution :**

```
let rec last_letter_suffix e =
    match e with
      | Letter_ind(a,i) -> [a,i]
      | SumL(e1, e2) -> last_letter_suffix e1 @ last_letter_suffix e2
      | ConcatL(e1, KleeneL(e2)) -> last_letter_suffix e1 @
        last_letter_suffix e2
      | ConcatL(_, e2) -> last_letter_suffix e2
      | KleeneL(e) -> last_letter_suffix e
  ;;
```

B4. Écrire une fonction de signature
`cartesian_product : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b)list`
qui renvoie le produit cartésien de deux listes d'entiers. Par exemple, `cartesian_product [1;3] [2;4;6;8]` renvoie `[(1, 2); (1, 4); (1, 6); (1, 8); (3, 2); (3, 4); (3, 6); (3, 8)]`.

**Solution :**

```
let cartesian_product set1 set2 =
   let rec assoc e l = (* map *)
        match l with
            | [] -> []
            | h::t -> (e,h):: assoc e t in
   let rec aux set = (* accumulation des map *)
        match set with
            | [] -> []
            | e :: t -> assoc e set2 @ aux t
  in aux set1;;

let cartesian_product set1 set2 =
    List.fold_left (fun acc e -> acc@ (List.map (fun e' -> (e,e')) set2)) []
         set1;;
```

---

B5. **Ensemble F.** Écrire une fonction récursive de signature `two_factors : lregexp -> ((char * int )* (char * int))list` qui renvoie les facteurs possibles de longueur 2 d'une expression régulière linéarisée.

**Solution :**

```
let rec two_factors e =
    match e with
      | Letter_ind(_,_) -> []
      | SumL(e1, e2) ->  two_factors e1 @ two_factors e2
      | ConcatL(e1, e2) -> let l = two_factors e1 @ two_factors e2
                           in l @ cartesian_product (last_letter_suffix e1)
                                (first_letter_prefix e2)
      | KleeneL(e) -> two_factors e @ cartesian_product (last_letter_suffix
          e) (first_letter_prefix e)
  ;;
```

---

## C Algorithme de Berry-Sethi

L'algorithme de Berry-Sethi permet d'obtenir l'automate de Glushkov qui n'est pas déterministe a priori. C'est pourquoi on choisit de modéliser l'automate comme suit :

```
type ndfsm ={ states : int list;
                alphabet : char list;
                initial : int list;
                transitions : (int * char * int) list;
                accepting : int list};;
```

---

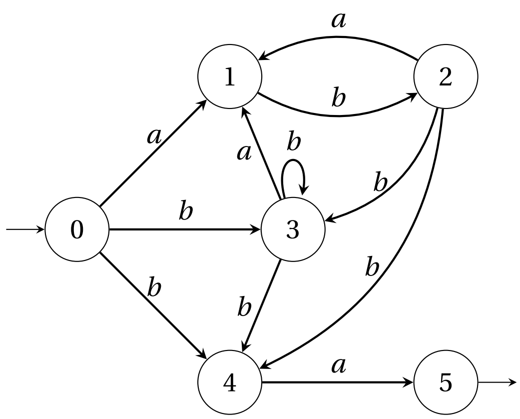
On choisit de représenter les états par un numéro. **Le zéro est l'état initial. Les états sont ensuite numérotés d'après l'indice des lettres de l'expression régulière linéarisée.** On s'appuie par ailleurs sur toutes les fonctions précédemment écrites.

C1. Linéariser à la main l'expression régulière $(ab|b)^*ba$ telle que l'effectue la fonction `linearize` déjà programmée.

**Solution :** $(a_1b_2|b_3)^*b_4a_5$

C2. Déterminer à la main l'automate de Glushkov associé à l'expression régulière $(ab|b)^*ba$.

**Solution :** cf. cours. C'est un automate local non déterministe.




C3. Écrire une fonction de signature `all_states : regexp -> int list` qui renvoie la liste de tous les états de l'automate de Glushkov associés à une expression régulière. On utilisera la fonction `linearize`. Par exemple, pour $(a|b)^* c$, cette fonction renvoie `[0; 1; 2; 3]`.

**Solution :**

```
let all_states e =
    let (_,c) = linearize_and_count e 1 in
    let states = ref [] in
    for i = c downto 0 do
        states := i :: !states
    done;
    !states;;

let all_states e =
    let (_,c) = linearize_and_count e 1 in
    let rec create states k =
        match k with
         | 0 -> [0]
         | _ -> create (k::states) (k-1)
    in create [] c;;
```

C4. Les états accepteurs de l'automate de Glushkov sont déterminés par l'ensemble S obtenu grâce à la fonction `last_letter_suffix`. Écrire une fonction de signature
`accepting_states : lregexp -> 'b list`
qui prend comme paramètre une expression régulière linéarisée et qui renvoie l'ensemble des états accepteurs de l'automate de Glushkov.

**Solution :**

```
let accepting_states linexp =
    let rec aux letters =
        match letters with
          |[] -> []
          |(_,n)::t -> n::(aux t) in
    aux (last_letter_suffix linexp);;
```

C5. Écrire une fonction récursive de signature `initial_transitions : ('a * 'b)list -> (int * 'a * 'b)list` dont le paramètre est un ensemble P et qui renvoie la liste des transitions depuis l'état initial de l'automate de Glushkov.

**Solution :**

```
let rec initial_transitions p =
    match p with
        |[] -> []
        |(c,n)::t -> (0,c,n)::(initial_transitions t);;
```

C6. Écrire une fonction récursive de signature `inner_transitions : (('a * 'b)* ('c * 'd))list -> ('b * 'c * 'd)list` dont le paramètre est un ensemble F et qui renvoie la liste des transitions internes de l'automate de Glushkov.

**Solution :**

```
let rec inner_transitions factors =
    match factors with
        |[] -> []
        |((_,n1),(c2,n2))::t -> (n1,c2,n2)::(inner_transitions t);;
```

C7. Écrire une fonction de signature `all_transitions : lregexp -> (int * char * int)list` qui renvoie la liste des transitions de l'automate de Glushkov.

**Solution :**

```
let all_transitions e =
    (initial_transitions (first_letter_prefix e)) @ (inner_transitions (
        two_factors e));;
```

C8. Écrire une fonction de signature `get_alphabet_from_trans : ('a * 'b * 'c)list -> 'b list` qui renvoie l'alphabet de l'automate de Glushkov d'après ses transitions.

**Solution :**

```
let get_alphabet_from_trans trans =
    let rec extract_letters transitions =  (* map *)
        match transitions with
        | [] -> []
        | (_,c,_) :: t -> c :: extract_letters t in
    let rec rm_dup acc letters = (* fold left *)
        match letters with
        | [] -> []
```

```
          | c :: t -> if List.mem c acc then rm_dup acc t else rm_dup (c ::
            acc) t in
      rm_dup [] (extract_letters trans);;
```

C9. Écrire une fonction de signature `glushkov : regexp -> ndfsm` qui renvoie l'automate de Glushkov associé à une expression régulière.

**Solution :**

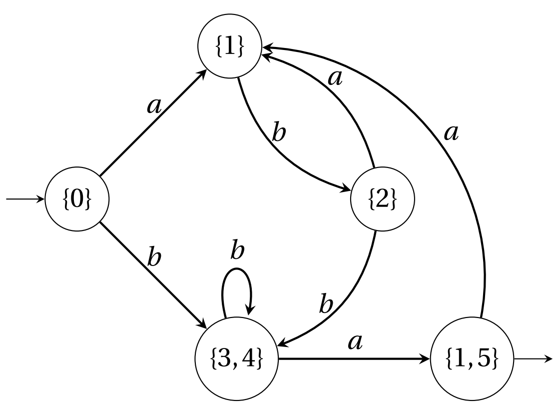
```
let glushkov rexp =
  let (e,c) = (linearize_and_count rexp 1) in
   let t = all_transitions e in
    { states = List.init c (fun i -> i);
        alphabet = get_alphabet_from_trans t;
        initial = [0] ;
        transitions = t;
        accepting = accepting_states (last_letter_suffix e) };;
```

C10. Déterminiser à la main l'automate de Glushkov obtenu grâce la fonction précédente à partir de l'expression régulière $(ab|b)^* ba$.

**Solution :**

| | ↓{0} | {1} | {2} | {3,4} | ↑{1,5} |
|---|---|---|---|---|---|
| a | {1} | | {1} | {1,5} | |
| b | {3,4} | {2} | {3,4} | {3,4} | {2} |

ce qui se traduit par l'AFD :

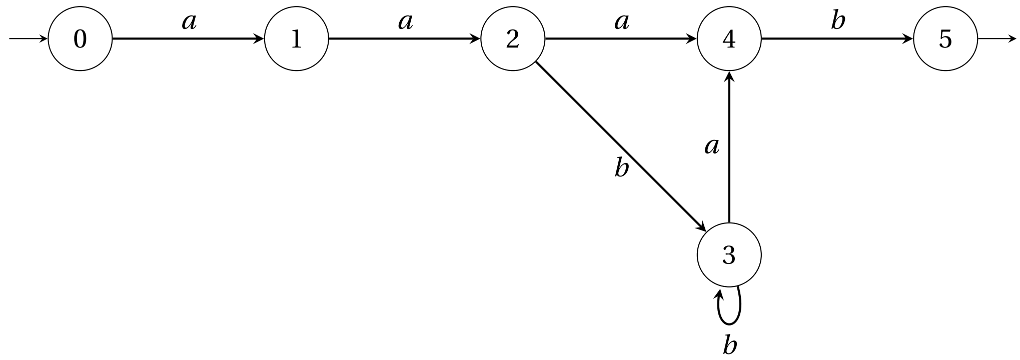



## D Entraînement

D1. En utilisant l'algorithme de Berry-Sethi, trouver l'automate associé aux expressions régulières suivantes :

(a) $aab^*ab$

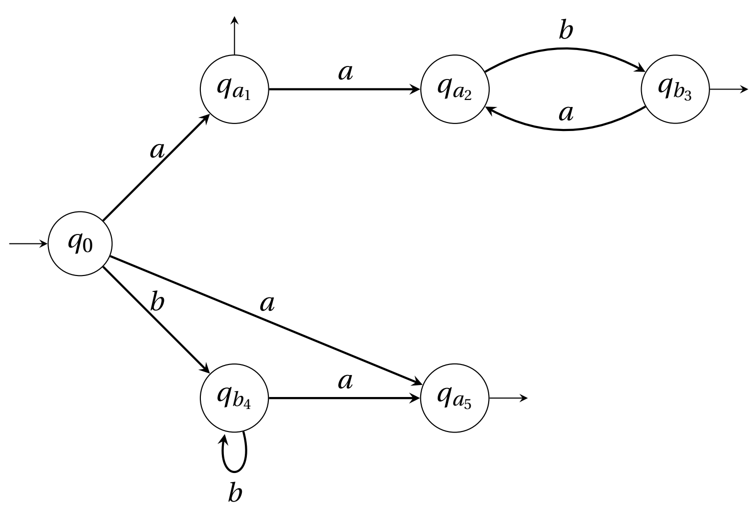
**Solution :**




(b) $a(ab)^*|b*a$

**Solution :**

1. Linéarisation : $a_1(a_2b_3)^*|b_4^*a_5$
2. Ensembles P,S, F :
   - $P = \{a_1, b_4, a_5\}$
   - $S = \{a_1, b_3, a_5\}$
   - $F = \{a_1a_2, a_2b_3, b_3a_2, b_4b_4, b_4a_5\}$
3. Automate = $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ :
   - $Q = \{q_0, q_{a_1}, q_{a_2}, q_{b_3}, q_{b_4}, q_{a_5}\}$
   - $F = \{q_{a_1}, q_{b_3}, q_{a_5}\}$




(c) $(b|ab)^*(\epsilon|ab)$

D2. En utilisant l'algorithme de Thompson, trouver l'automate associé aux expressions régulières suivantes :

(a) $a^*b$

(b) $aab^*ab$

(c) $(a|b)^* a^* b^*$

(d) $(b|ab)^*(\epsilon|ab)$

(e) $a(ab)^*|b^* a$

**Solution :** cf. cours : automates associés aux expressions régulières élémentaires et élimination des transitions spontanées. On doit retrouver le même qu'avec Berry-Sethi!