

# Introduction aux langages

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 3.7 - Olivier Reynet

## À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ utiliser le lemme de Levi
- ☞ manipuler un alphabet, un langage et ses puissances,
- ☞ programmer en OCaml des outils pour manipuler les langages.

## A Mots, alphabets et lemme de Levi

On considère une alphabet  $\Sigma$  contenant au moins deux éléments.

- A1. Soit  $\Sigma$  un alphabet. Soient  $a$  et  $b$  deux **lettres** de  $\Sigma$ . Montrer que  $\forall u \in \Sigma^*, ua = bu \implies a = b$  et  $u \in \{a\}^*$ . On utilisera la définition inductive des mots.
- A2. Soient  $r, s, u, v$  et  $w$  quatre mots de  $\Sigma^*$  tels que  $w = ur$  et  $w = vs$ . Montrer que  $u$  est un préfixe de  $v$  ou que  $v$  est un préfixe de  $u$ .
- A3. Soient  $u$  et  $v$  deux mots de  $\Sigma^*$  qui vérifient  $uv = vu$ . Démontrer par induction structurelle sur les mots que :

$$\exists w \in \Sigma^*, \exists n, m \in \mathbb{N}, u = w^n \text{ et } v = w^m$$

- A4. Soient deux mots  $u$  et  $v$  de  $\Sigma^*$ . Montrer que :

$$\exists p, q \in \mathbb{N}, u^p = v^q \iff \exists w \in \Sigma^*, \exists n, m \in \mathbb{N}, u = w^n \text{ et } v = w^m$$

- A5. On définit les mots de Fibonacci sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  par :

$$w_0 = \epsilon \tag{1}$$

$$w_1 = a \tag{2}$$

$$w_2 = b \tag{3}$$

$$w_n = w_{n-1} w_{n-2}, \forall n > 2 \tag{4}$$

- (a) On suppose  $n > 2$ . Montrer que le suffixe de longueur deux de  $w_n$  est  $ba$  si  $n$  est impair et  $ab$  sinon.
- (b) On suppose  $n > 3$  et on définit le mot  $v_n$  comme le préfixe de  $w_n$  obtenu en supprimant les deux dernières lettres. Montrer que  $v_n$  est un palindrome.
- (c) Écrire une fonction OCaml de signature `is_palindrome : string -> bool` qui permet de tester si une chaîne de caractères est un palindrome. Le pattern matching sur le type `string` n'est pas possible en OCaml car, contrairement aux listes, ce n'est pas type défini inductivement.

(d) Écrire quatre versions de la fonction signature `fib_word : int -> string` qui renvoie le nième mot de Fibonacci. Ces quatre versions correspondent à :

1. une version à récursivité multiple,
2. une version à récursivité terminale,
3. une version itérative (programmation dynamique par le bas)
4. une version avec mémoïsation (programmation dynamique récursive).

Vérifier le résultat de la question b.

## B Langage et concaténation

B1. Soit  $\mathcal{L}$  un langage sur  $\Sigma$ . Démontrer que  $\mathcal{L}.\emptyset = \emptyset.\mathcal{L} = \emptyset$ .

B2. Soit  $\Sigma$  un alphabet. Que vaut le cardinal de  $\Sigma^n$  en fonction du cardinal de  $\Sigma$ ? (S'appuyer sur la définition inductive de la puissance d'un langage)

B3. On se donne l'alphabet `let sigma = ["a"; "b"; "c"]`, c'est à dire qu'on l'implémente par une liste. Écrire une fonction OCaml de signature `sigma_k : 'a list -> int -> 'a list list` qui génère le langage  $\Sigma^k$  sous la forme d'un liste de liste. Les éléments de cette liste seront les mots. Par exemple, `sigma_k sigma 2` renvoie :

```
[["a"; "a"]; ["a"; "b"]; ["a"; "c"]; ["b"; "a"]; ["b"; "b"]; ["b"; "c"]; ["c";
  "a"]; ["c"; "b"]; ["c"; "c"]]
```

---

B4. Peut-on représenter  $\Sigma^*$  avec cette implémentation?